數學傳播　49卷4期, pp. 132-138

美麗的星形線

薛黨鵬

摘要: 以星形線爲主題設立高中數學探究課, 引導學生從多角度探究星形線, 體會數和形之間的辯證關係, 掌握動態數學軟體在數學探究中的應用。

關鍵字: 星形線、動態數學軟體、數學探究。

GeoGebra、幾何畫板、網路畫板、圖形計算器等數學軟體, 不僅具有強大的計算、作圖、統計等功能, 同時具有動態展示、輔助實驗、數理探究等功能。在數理探究課上, 我們設立了星形線主題教學, 引導學生利用數學軟體多個角度探究星形線, 收到了較好的教育教學效果。特撰寫成文, 希冀有助於高中老師教學參考。

1. 從圓的方程說起

我們知道, 方程 $x^2+y^2=1$ 對應的曲線爲單位圓, 即以原點爲圓心, 1 爲半徑的圓。那麼, 當參數 n 變化時, 方程 $x^n+y^n=1$ 對應的曲線如何變化?

細想一下, 就會覺得這個問題很有意思。爲使曲線具有更好的對稱性和封閉性, 我們不妨把方程改成 $|x|^n+|y|^n=1$。將 n 設置爲參數, 運用數學作圖軟體可以作出方程對應的曲線。

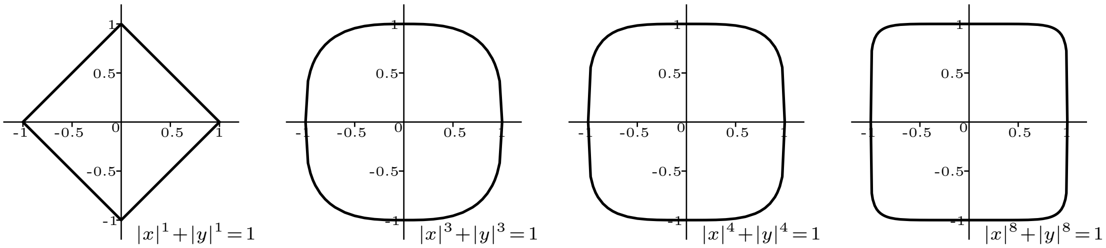

圖1

啟動參數 n 後, 曲線呈現出萬千姿態, 圖 1 爲其中四種具體情況。既知其然, 又知其所以然。曲線爲何如此變化? 形由數決定, 形的變化可以從數的角度進行分析。事實上, 對於曲線 $|x|^n+|y|^n=1$ 上的點 $P(x_0,y_0)$, 若 $|x_0|\in(0,1)$, 則當 n 越大時, $|x|^n$ 越趨向於 0, 從而 $|y_0|$ 越趨向於 1, 於是曲線越趨向於正方形。

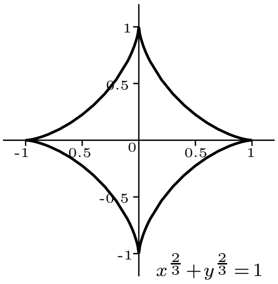

圖2

特殊地, 取 $n=\frac{2}{3}$, 方程所對應的曲線就像天空裡一顆耀眼的星, 我們稱其爲星形線。如圖2所示。星形線的方程爲

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1.$$

利用三角代換, 我們不難得知星形線存在參數方程

$$\begin{cases} x=\cos^3\theta, \\ y=\sin^3\theta. \end{cases}$$

2. 圓的滾動

當一個動圓繞著另一個定圓在其外部 (或內部) 旋轉時, 動圓上的定點可形成漂亮的曲線, 此曲線就是擺線。擺線的形狀與兩圓的半徑比值有關。爲方便起見, 我們設定圓 O 爲單位圓 $x^2+y^2=1$, $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 爲圓 O 上的動點, 以 $O_1((1+r)\cos\theta,(1+r)\sin\theta)$ 爲圓心, 過 P 作動圓, 將 P 點繞 O_1 旋轉 $\frac{\theta}{r}$ 得點 M。

將 M 設爲跟蹤點, 啟動參數 θ, 則可得到圓 O_1 繞圓 O 滾動的動圖。M 點的軌跡形成擺線。擺線的形狀隨著 r 的變化而變化 ($r<0$ 時, 擺線爲內擺線; $r>0$ 時, 擺線爲外擺線)。

特殊地, 取 $r=-\frac{1}{4}$, 則所得擺線形似星形線。果真如此嗎?

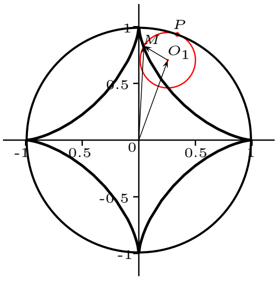

圖3

事實上, 在圖 3 中有

$$\begin{aligned} OM &= OO_1 + O_1M \\ &= \frac{3}{4}(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{1}{4}(\cos(-3\theta), \sin(-3\theta)) \\ &= \Big(\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta, \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta\Big). \end{aligned}$$

利用三倍角公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

可得動點 M 的軌跡參數方程可化簡爲

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta, \\ y = \sin^3\theta. \end{cases}$$

這正是星形線的參數方程. 若取 $r = -\dfrac{3}{4}$, 則不難驗證和證明得到的擺線仍是星形線。

3. 梯子滑落

靠立在牆上的梯子滑落時, 梯子掃過的部分形成了什麼樣的圖形?

我們把這一問題數學抽象後進行探討。設長度爲 1 的線段兩個端點 A, B 分別在兩個坐標軸上移動, 求線段 AB 的軌跡。我們運用數學軟體可很容易地作出動圖, 不難發現, 軌跡的邊界線似乎又是星形線。

事實上, 在兩個坐標軸上截得的線段長度爲定值 1 的直線族可設爲

$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1.$$

我們探求此直線族, 即 $y = -\tan\theta \cdot x + \sin\theta$ 和直線 $x = x_0$ 的最高交點 (x_0, y_0) 的軌跡。爲便於討論, 不妨設 $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ 由

$$\begin{cases} y'(\theta) = -\dfrac{x_0}{\cos^2\theta} + \cos\theta = 0, \\ y_0 = -\tan\theta \cdot x_0 + \sin\theta. \end{cases}$$

消去 θ 可得 $y_0 = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x_0^2}}(1 - \sqrt[3]{x_0^2})$。整理即

$$x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = 1 \quad (x_0 > 0, y_0 > 0).$$

注意到對稱性, 便知動直線族的包絡爲星形線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$。

反過來, 星形線 $\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$, 上任一點 $P(x,y)$ 處的切線斜率爲

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta.$$

於是, 切線方程爲

$$y - \sin^3\theta = -\tan\theta(x - \cos^3\theta).$$

整理得

$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1.$$

顯然, 此直線在兩個坐標軸上截得的線段長度爲定值 1。

4. 四葉玫瑰線

我們知道, $\rho = a \cdot \sin(n\theta)$ 表示玫瑰線。在四葉玫瑰線 $\rho = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ 上任取一點 P, 坐標原點爲 O, 過 P 作 OP 的垂線, 交兩坐標軸分別於 A, B 兩點。我們運用數學軟體作出動圖, 將 P 設爲動點, 跟蹤線段 AB, 不難發現其軌跡包絡似乎又爲星形線。

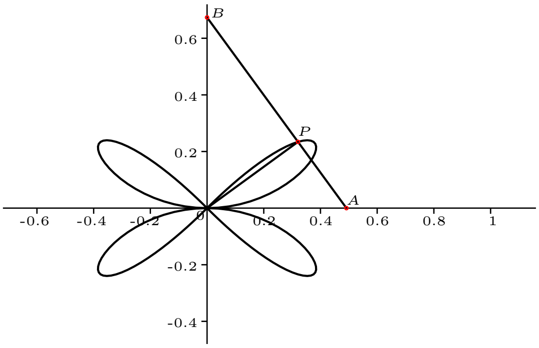

圖 4

事實上, 我們設 P 點的極坐標爲 (ρ_0, θ_0), 則 $\rho_0 = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta_0$。於是

$$|AB| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{\frac{\rho_0^2}{\sin^2\theta_0} + \frac{\rho_0^2}{\cos^2\theta_0}} = 2\sqrt{\frac{\rho_0^2}{\sin^2 2\theta_0}} = 1.$$

於是, 由前邊的“梯子滑落”的討論可知, AB 的軌跡包絡爲星形線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$。

反過來, 如果我們在星形線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 上任意取一點 M, 經過 M 作切線, 再過 O 作切線的垂線, 設垂足爲 H, 則 H 的軌跡爲四葉玫瑰線。這一結論也很容易論證。

在數學上, 經過一定點 M 向曲線 C_1 上的動點 P 處的切線引垂線, 則垂足所形成的軌跡 C_2, 稱爲曲線 C_1 關於點 M 的垂足曲線。曲線 C_2 稱爲曲線 C_1 關於點 M 的反垂足曲線。

這表明, 四葉玫瑰線關於中心的反垂足曲線爲星形線。反過來說, 就是星形線關於其中心的垂足曲線爲四葉玫瑰線。

5. 公車門

普通的房門是完整的一扇或者對開的兩扇。但是, 老式公共汽車的門不但是對開的兩扇, 而且每一扇都由相同的兩半用鉸鏈鉸接而成。開門或關門時, 以靠近門軸的半扇繞著門軸旋轉, 另半扇的外端沿著連接兩個門軸的滑槽滑動。開門時一扇門折合成爲半扇, 關門時又重新伸展成一扇。

那麼, 公車門爲什麼要設計成這樣呢? 我們猜想, 如此設計, 門扇在開關時掃過的空間相對要較小。果真如此嗎?

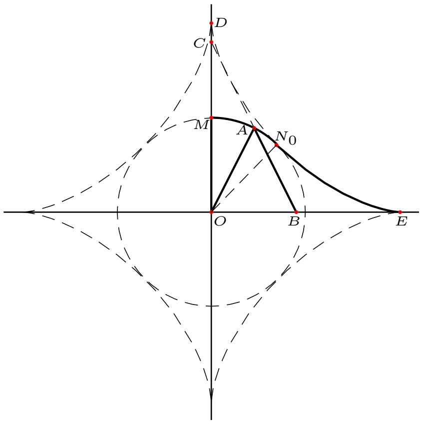

圖5

如圖 5, 設 O 爲坐標原點, $E(1,0,0)$, $B(t,0,0)$, 其中 $t\in[0,1]$。分別以 O 和 B 爲圓心, 0.5 爲半徑在 xOy 平面內作半圓, 交於點 A。這時, 我們可將 OA, BA 視爲寬度爲 1 的車門的兩個半扇的上頂邊線。其中, O 對應門軸, A 對應兩個半扇門的連結鉸鏈, OE 爲滑槽。利用 GeoGebra 等數學軟體, 我們再做出折線 OAA_1O_1O 和 ABB_1A_1A, 其中 O_1, A_1, B_1 的坐標分別爲 $(0,0,-2)$, $(x_A,y_A,-2)$, $(x_B,y_B,-2)$。然後, 啟動參數 t, 則在 3D 繪圖區和平面繪圖區即可演示公車門開關的立體和橫向截面動態圖。若將線段設爲跟蹤, 則可繪製出開關門時的橫截面區域。我們下邊給出定量計算。

門在開關運動中, OA 繞著 O 旋轉, 因此 A 點的軌跡爲以 O 爲圓心, 0.5 爲半徑的圓在第一象限的部分, 即 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{1}{2}\sin\theta \end{cases}, (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$。延長 BA 交 y 軸於 C, 由 $OA=BA$

及 $\angle BOC = 90^\circ$ 可知 $BC = 1$ 爲定值。因此, 由前邊的討論知, 門在開關過程中, BC 的軌跡包絡爲星形線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 在第一象限的部分, 即 $\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}, (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$。

設 $N(\cos^3\theta_0, \sin^3\theta_0)$ 爲其上一點, 則

$$\begin{aligned}
|ON| &= \sqrt{\cos^6\theta_0 + \sin^6\theta_0} \\
&= \sqrt{(\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0)^3 - 3(\cos^2\theta_0 \sin^2\theta_0)(\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0)} \\
&= \sqrt{1 - 3(\cos^2\theta_0 \sin^2\theta_0)} \\
&\ge \sqrt{1 - 3\Big(\frac{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0}{2}\Big)^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

當且僅當 $\cos\theta_0 = \sin\theta_0$, 即 N 爲 $N_0\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\Big)$ 時, $|ON|_{\min} = \frac{1}{2}$.

由此可知, 折線 OAB 的軌跡包絡爲圓弧 MN_0、1/8 的星形線 N_0E 以及線段 EO、線段 OM。其中, M 爲 $(0, \frac{1}{2})$。於是, 車門開關過程中, 掃過的橫截面由兩個部分組成。其一爲扇形 OMN_0 (半徑爲 0.5 的八分之一圓), 其二爲線段 N_0O、OE 和 1/8 星形線 N_0E 所圍成的圖形 (完整星形線所圍圖形的八分之一, 即星形線和非負坐標軸所圍圖形的一半)。記兩部分的面積分別爲 S_1, S_2 則

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{\pi}{32}, \\
S_2 &= \frac{1}{2}\int_0^1 ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3\theta d(\cos^3\theta) \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\Big)^2 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta - \cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta) d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\theta) d\theta - \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta - \cos^3 2\theta) d\theta \\
&= \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 - \frac{1+\cos 4\theta}{2}\Big) d\theta - \frac{3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\theta) d\sin 2\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta - \frac{3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\sin 2\theta\\
&= \frac{3}{32}\Big[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{32}\Big[\frac{\sin^3 2\theta}{3}\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{3\pi}{64}.
\end{aligned}
$$

如果我們運用 Wallis 公式 $\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta$ 其中 $n\geq 2,\, n\in Z\Big)$, 則上述計算 S_2 的過程可以簡化, 即

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3\theta d(\cos^3\theta)\\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta\\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\theta - \sin^6\theta)d\theta\\
&= \frac{3}{2}\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\Big)\\
&= \frac{3\pi}{64}.
\end{aligned}
$$

所以, $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{32} + \frac{3\pi}{64} = \frac{5\pi}{64}$。

於是, 一扇寬度爲 1 的折疊式車門, 所需活動的橫截面面積爲 $S = \frac{5\pi}{64}$, 而一扇寬度爲 1 的普通門開關所需的面積爲單位圓面積的四分之一, 即 $S' = \frac{\pi}{4}$, 於是, 兩折門所占地方僅有普通門的十六分之五。由此可見, 這種門要節省好多活動空間。過去擠乘公車的人很多, 這樣設計的車門就特別實用。當然, 現在的公車大都採用平行車門, 開門時車門總是平行於車身且車門在外, 這樣就更節省空間了。

數和形是數學研究的兩個基本物件。在坐標系的背景下, 數和形是關聯的、對應的、統一的。以星形線爲主題的探究學習表明, 數學軟體在助力數學探究, 引導學生研究數、形及其關係方面大有裨益。

參考文獻

1. 曹絮, 杜昺璿。用 GeoGebra 繪製橢圓 [J]。中學生數學, 2021, 8。
2. 蔣聲。形形色色的曲線[M]。上海: 上海教育出版社, 1985。
3. 常庚哲, 史濟懷。數學分析教程[M]。安徽: 中國科學技術大學出版社, 1998。
4. 薛黨鵬。星形線探究。https://www.geogebra.org/m/twdmnk5y。

—本文作者任教中國陝西省西安中學—